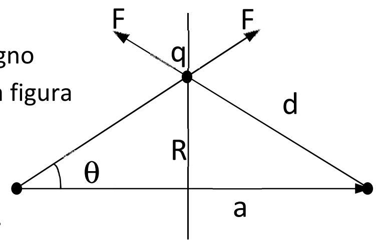
Prova scritta di Fisica 2 13.1.2014

Esercizio n.1 [8 punti]

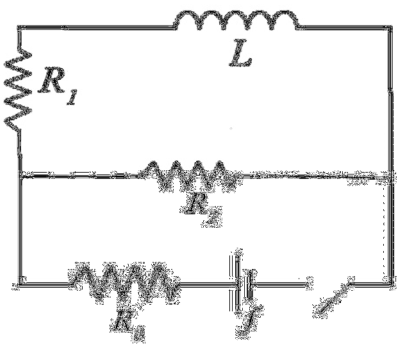
Due cariche uguali puntiformi **Q** sono fissate ad una distanza ***2a.*** Una carica puntiforme ***q<<Q*** viene posta sul piano normale alla congiungente le due cariche e passante per il punto mediano. Determinare il luogo dei punti di questo piano sul quale la forza elettrostatica che agisce sulla carica ***q*** ha la massima intensità.

Soluzione



L'intensità è il modulo della forza, il segno delle cariche non ha importanza, a seconda del segno relativo di q e di Q la risultante della forza sarà diretta verso la retta o in verso opposto. Nella figura sono supposte tutte dello stesso segno per cui la forza è repulsiva.
La forza totale sulla carica q, in direzione verticale, è $F_y = 2\,k\frac{qQ}{d^2}\sin\theta$
La forza totale in direzione orizzontale è nulla, essendo le due componenti uguali e contrarie.
Esprimendo la forza in funzione di R=dsenθ, ho: $F_y = 2\,kqQ\,\frac{R}{(R^2+a^2)^{3/2}}$
Da cui, imponendo che $\frac{\partial F}{\partial R} = 0$, ottengo il valore del massimo di F_y che si avrà per $R_M = {a}/{\sqrt{2}}$
Deve essere per forza un massimo, facendo al derivata seconda si può verificare che è effettivamente un massimo. Il luogo cercato è quindi quello di una circonferenza di raggio R_M.

Esercizio n.2 [11 punti]



Un circuito è composto da tre resistenze, un'induttanza e un generatore di f.e.m. ideale (vedi figura). All'istante iniziale la corrente è nulla in tutti i rami del circuito. Alla chiusura dell'interruttore la corrente istantanea erogata dal generatore è $\boldsymbol{I_f(0) = 5\,mA}$, mentre a regime la stessa corrente vale $\boldsymbol{I_f(\infty) = 9\,mA}$. Determinare i valori della f.e.m. ***f*** del generatore, della resistenza $\boldsymbol{R_1}$ e della corrente che scorre in ***L*** a regime.
Quando il sistema è a regime, si riapre l'interruttore, e si misura l'energia ***U*** che viene dissipata nel circuito fino a quando il sistema non ritorna in uno stato stazionario. Trovare quindi il valore dell'induttanza ***L.***
*Nota: il problema **può** essere risolto anche senza risolvere le relative equazioni differenziali.*

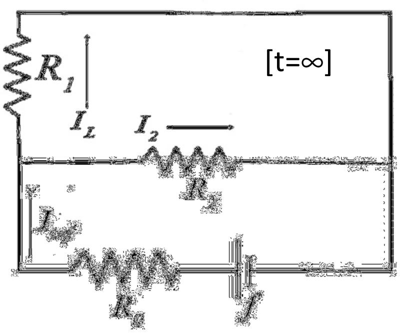
Dati: R_0= 2,5 kΩ ; R_2 = 2R_0 ; U = 36 nJ.

Soluzione

1. All'istante iniziale nell'induttanza non passa corrente (nella "carica" di un'induttanza ho che la corrente all'inizio è nulla e sale con una costante di tempo τ fino ad un valore costante).

Quindi la corrente erogata dal generatore per t=0 passa solo per la serie delle due resistenze R_0 e R_2:

$$f = I_f(0)(R_0 + R_2) = 3R_0 I_f(0) = 37{,}5\,V$$



2. Per t=∞ la corrente è costante dappertutto, quindi l'induttanza non ha d.d.p. e la corrente passa attraverso la resistenza totale R_T=(R_0 in serie al parallelo di R_1,R_2): $R_T = R_0 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ quindi $f = I_f(\infty)R_T$ da cui, inserendo il valore di f trovato precedentemente, ottengo $R_1 = R_0$ = 2,5 kΩ.

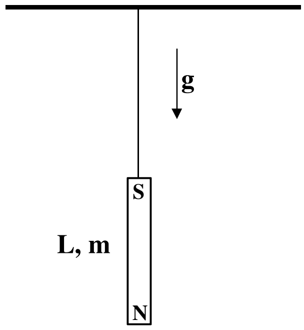
3. La corrente attraverso l'induttanza L si calcola a regime, per t=∞, quando la corrente è costante e non c'è il contributo di $V_L = L\frac{dI}{dt}$, calcolando le correnti nei tre rami:

$$\begin{cases} I_{inf} = I_2 + I_L \\ I_2 R_2 = I_L R_1 \end{cases}$$

da cui si ricava: $I_L = \frac{2}{3} I_f(\infty) = \frac{2}{3} 9\, mA = 6\, mA$

4. Quando si apre l'interruttore il ramo con il generatore viene escluso, quindi la corrente che scorreva nell'induttanza si scarica tutta attraverso la serie di R1 + R2= $3R_0$. Il valore della resistenza su cui si scarica in ogni caso non serve per il calcolo, dato che l'energia dissipata nel circuito è semplicemente l'energia magnetica in L prima della scarica.
Quindi si ha: $U = \frac{1}{2} L\, I_L^2$ da cui $L = \frac{2U}{I_L^2} = \frac{2 \cdot 36\, 10^{-9}}{36 \cdot 10^{-6}} = 2\, mH$

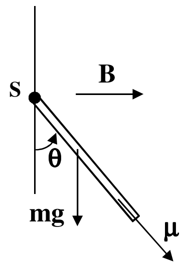
Esercizio n.3 **[11 punti]**



Si consideri il sistema mostrato in figura, composto da un magnete assimilabile a una sbarretta sottile di massa ***m*** e lunghezza ***L***, caratterizzato da un momento magnetico **μ,** appeso ad un filo ideale ed immerso nel campo gravitazionale terrestre.
Al sistema viene quindi applicato un campo magnetico ***B,*** costante, uniforme e diretto secondo un asse orizzontale. Si chiede di determinare la posizione di equilibrio del sistema in presenza del campo **B**. Determinare inoltre la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (solo la formula esplicita, senza il calcolo numerico).

Dati: m = 20 g ; L = 2 cm ; μ = 5 · 10^{-4} Am^2 ; B = 2,3 T ; g = 10 m/s^2.

Soluzione



Sul sistema agisce il momento dovuto all'interazione Campo B/magnete μ. Essendo il magnete vincolato al filo, la rotazione avviene intorno al punto di connessione con il filo (il polo S). Il magnete è sottoposto anche al momento dovuto alla forza di gravità, applicato nel centro di massa. Il filo non si sposta! L'equilibrio si ha imponendo che il momento totale sia nullo. Scrivendo i momenti rispetto al polo S (altrimenti occorrerebbe considerare anche la tensione del filo) si ha: $\overline{M} = \overline{M_g} + \overline{M_B}$ dove

$$\begin{cases} \overline{M}_B = \bar{\mu} \times \bar{B} = \mu B \cos\theta \\ \overline{M}_g = \bar{r} \times m\bar{g} = -\frac{L}{2} mg \sin\theta \end{cases}$$ da cui $\overline{M} = 0$ per: $\mu B \cos\theta_e = \frac{L}{2} mg \sin\theta_e$; $b\cos\theta_e = a \sin\theta_e$

Cioè per $\tan\theta_e = \frac{b}{a} = \frac{2\mu B}{Lmg} = 0{,}575 \ \rightarrow \theta_e \cong 30^0$
Per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni **intorno alla posizione di equilibrio θ_e** devo scrivere il momento totale in funzione di una piccola variazione di θ, quindi per $\theta = \theta_e + \delta\theta$. Avrò quindi:

$$\mathrm{M}(\theta) = \mathrm{b}\cos\theta - \mathrm{a}\sin\theta = \mathrm{b}\cos(\theta_e + \delta\theta) - \mathrm{a}\sin(\theta_e + \delta\theta) =$$
$$= \mathrm{b}[\cos\theta_e \cos\delta\theta + \sin\theta_e \sin\delta\theta] - \mathrm{a}[\sin\theta_e \cos\delta\theta + \sin\delta\theta\cos\theta_e] .$$

Tenendo conto che $\delta\theta$ è piccolo, si possono fare le sostituzioni: $\cos\delta\theta = 1$; $\sin\delta\theta = \delta\theta$, da cui si ha:
$\mathrm{M} = \mathrm{b}\cos\theta_e + \mathrm{b}\,\delta\theta\sin\theta_e - \mathrm{a}\sin\theta_e - \mathrm{a}\,\delta\theta\cos\theta_e = \cos\theta_e\left[\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}} - \mathrm{a}\right]\delta\theta = -\mathrm{k}\delta\theta$ dove: $\mathrm{k} = -\cos\theta_e\left[\frac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2}{\mathrm{a}}\right]$ è maggiore di zero. Il momento è proporzionale a (meno) l'angolo di rotazione della sbarretta, quindi il moto è armonico, con equazione $I\,\ddot{\delta\theta} + k\,\delta\theta = 0$ dove *I* è il momento d'inerzia intorno all'asse passante per l'estremo del magnete, la frequenza delle piccole oscillazioni intorno a $\theta = \theta_e$ sarà quindi: $\mathrm{f} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{I}}} = 3{,}5\ Hz$
Il momento d'inerzia della sbarretta è $\mathrm{I} = \frac{1}{3}\mathrm{mL}^2$.